Series SOS

Code No. **65/1**
कोड नं.

Roll No.
रोल नं.

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.
परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

- Please check that this question paper contains **11** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **29** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minutes time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer script during this period.
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **11** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।

MATHEMATICS

गणित

Time allowed : 3 hours *Maximum Marks : 100*

निर्धारित समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

General Instructions :

(i) All questions are compulsory.

(ii) The question paper consists of **29** questions divided into three sections A, B and C. Section A comprises of **10** questions of **one mark** each, Section B comprises of **12** questions of **four marks** each and Section C comprises of **7** questions of **six marks** each.

(iii) All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.

(iv) There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 4 questions of four marks each and 2 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.

(v) Use of calculators is **not** permitted.

सामान्य निर्देश :

(i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।

(ii) इस प्रश्न पत्र में **29** प्रश्न हैं जो तीन खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब तथा स । खण्ड अ में **10** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **एक अंक** का है । खण्ड ब में **12** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **चार अंक** का है । खण्ड स में **7** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **छः अंक** का है ।

(iii) खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकता अनुसार दिए जा सकते हैं ।

(iv) पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी चार अंकों वाले 4 प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले 2 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प करना है ।

(v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति **नहीं** है ।

SECTION A
खण्ड अ

Question numbers 1 to 10 carry 1 mark each.

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

1. Let $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ and let $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ be a function from A to B. State whether f is one-one or not.

माना $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ तथा माना $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ A से B पर एक फलन है । बताइए कि क्या f एकैकी है अथवा नहीं ।

2. What is the principal value of $\cos^{-1}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right) + \sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$?

$\cos^{-1}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right) + \sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ का मुख्य मान क्या है ?

3. Evaluate :

$$\begin{vmatrix} \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ \sin 75^\circ & \cos 75^\circ \end{vmatrix}$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\begin{vmatrix} \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ \sin 75^\circ & \cos 75^\circ \end{vmatrix}$$

4. If $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, write A^{-1} in terms of A.

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ है, तो A^{-1} को A के रूप में लिखिए ।

5. If a matrix has 5 elements, write all possible orders it can have.

यदि एक आव्यूह में 5 अवयव हैं, तो इसकी सभी संभव कोटियाँ लिखिए ।

6. Evaluate :

$$\int (ax + b)^3 \, dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int (ax + b)^3 \, dx$$

7. Evaluate :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

8. Write the direction-cosines of the line joining the points (1, 0, 0) and (0, 1, 1).

बिन्दुओं (1, 0, 0) तथा (0, 1, 1) को मिलाने वाली रेखा के दिक्-कोसाइन लिखिए ।

9. Write the projection of the vector $\hat{i} - \hat{j}$ on the vector $\hat{i} + \hat{j}$.

सदिश $\hat{i} - \hat{j}$ का सदिश $\hat{i} + \hat{j}$ पर प्रक्षेप लिखिए ।

10. Write the vector equation of a line given by $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$.

$\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$ द्वारा प्रदत्त रेखा का सदिश समीकरण लिखिए ।

SECTION B

खण्ड ब

Question numbers 11 to 22 carry 4 marks each.

प्रश्न संख्या 11 से 22 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं ।

11. Let $f : R \rightarrow R$ be defined as $f(x) = 10x + 7$. Find the function $g : R \rightarrow R$ such that $gof = fog = I_R$.

OR

A binary operation $*$ on the set $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ is defined as :

$$a * b = \begin{cases} a + b, & \text{if} \quad a + b < 6 \\ a + b - 6, & \text{if} \quad a + b \geq 6 \end{cases}$$

Show that zero is the identity for this operation and each element 'a' of the set is invertible with $6 - a$, being the inverse of 'a'.

माना $f : R \rightarrow R$, $f(x) = 10x + 7$ द्वारा परिभाषित फलन है । एक ऐसा फलन $g : R \rightarrow R$ ज्ञात कीजिए कि $gof = fog = I_R$.

अथवा

समुच्चय $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ पर एक द्विआधारी संक्रिया $*$ इस प्रकार परिभाषित है :

$$a * b = \begin{cases} a + b, & \text{यदि} \quad a + b < 6 \\ a + b - 6, & \text{यदि} \quad a + b \geq 6 \end{cases}$$

दर्शाइए कि शून्य इस संक्रिया का तत्समक है तथा इस समुच्चय का प्रत्येक अवयव 'a' व्युत्क्रमणीय है और उसका व्युत्क्रम $6 - a$ है ।

12. Prove that :

$$\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1} x, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1} x, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$$

13. Using properties of determinants, solve the following for x :

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2x-3 & 3x-4 \\ x-4 & 2x-9 & 3x-16 \\ x-8 & 2x-27 & 3x-64 \end{vmatrix} = 0$$

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर निम्नलिखित को x के लिए हल कीजिए :

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2x-3 & 3x-4 \\ x-4 & 2x-9 & 3x-16 \\ x-8 & 2x-27 & 3x-64 \end{vmatrix} = 0$$

14. Find the relationship between 'a' and 'b' so that the function 'f' defined by :

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1, & \text{if} \quad x \leq 3 \\ bx + 3, & \text{if} \quad x > 3 \end{cases} \quad \text{is continuous at } x = 3.$$

OR

If $x^y = e^{x-y}$, show that $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\log x}{\{\log(xe)\}^2}$.

यदि फलन 'f', जो $f(x) = \begin{cases} ax + 1, & \text{यदि} \quad x \leq 3 \\ bx + 3, & \text{यदि} \quad x > 3 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है, x = 3 पर सतत है, तो 'a' तथा 'b' के बीच का सम्बन्ध ज्ञात कीजिए ।

अथवा

यदि $x^y = e^{x-y}$ है, तो दर्शाइए कि $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\log x}{\{\log(xe)\}^2}$.

15. Prove that $y = \dfrac{4\sin\theta}{(2 + \cos\theta)} - \theta$ is an increasing function in $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

OR

If the radius of a sphere is measured as 9 cm with an error of 0·03 cm, then find the approximate error in calculating its surface area.

सिद्ध कीजिए कि $y = \dfrac{4\sin\theta}{(2 + \cos\theta)} - \theta$, $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ में एक वर्धमान फलन है ।

अथवा

यदि एक गोले की त्रिज्या 9 सेमी मापी गई है, जिसमें 0·03 सेमी की त्रुटि है, तो उसके पृष्ठीय क्षेत्रफल के परिकलन में सन्निकट त्रुटि ज्ञात कीजिए ।

16. If $x = \tan\left(\frac{1}{a}\log y\right)$, show that

$$(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x - a)\frac{dy}{dx} = 0$$

यदि $x = \tan\left(\frac{1}{a}\log y\right)$ है, तो दर्शाइए कि

$$(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x - a)\frac{dy}{dx} = 0$$

17. Evaluate :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x + \sin x}{1 + \cos x}\, dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x + \sin x}{1 + \cos x}\, dx$$

18. Solve the following differential equation :

$$x\, dy - y\, dx = \sqrt{x^2 + y^2}\, dx$$

निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$x\, dy - y\, dx = \sqrt{x^2 + y^2}\, dx$$

19. Solve the following differential equation :

$$(y + 3x^2)\frac{dx}{dy} = x$$

निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$(y + 3x^2)\frac{dx}{dy} = x$$

20. Using vectors, find the area of the triangle with vertices A(1, 1, 2), B(2, 3, 5) and C(1, 5, 5).

सदिशों का प्रयोग कर, उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष A(1, 1, 2), B(2, 3, 5) तथा C(1, 5, 5) हैं ।

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}}$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{6x + 7}{\sqrt{(x-5)(x-4)}}\, dx$$

26. Sketch the graph of $y = |x + 3|$ and evaluate the area under the curve $y = |x + 3|$ above x-axis and between $x = -6$ to $x = 0$.

$y = |x + 3|$ का ग्राफ खींचिए तथा वक्र $y = |x + 3|$ तथा x-अक्ष के बीच $x = -6$ से $x = 0$ तक का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

27. Find the distance of the point $(-1, -5, -10)$, from the point of intersection of the line $\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$ and the plane $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5$.

बिन्दु $(-1, -5, -10)$ की रेखा $\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$ तथा समतल $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से दूरी ज्ञात कीजिए ।

28. Given three identical boxes I, II and III each containing two coins. In box I, both coins are gold coins, in box II, both are silver coins and in box III, there is one gold and one silver coin. A person chooses a box at random and takes out a coin. If the coin is of gold, what is the probability that the other coin in the box is also of gold ?

तीन सर्वसम डिब्बे I, II और III हैं जहाँ प्रत्येक में दो सिक्के हैं । डिब्बे I में, दोनों सिक्के सोने के हैं, डिब्बे II में, दोनों सिक्के चाँदी के हैं और डिब्बे III में, एक सोने का तथा एक चाँदी का सिक्का है । एक व्यक्ति यादृच्छया एक डिब्बा चुनता है और उसमें से एक सिक्का निकालता है । यदि यह सिक्का सोने का है, तो क्या प्रायिकता है, कि डिब्बे में दूसरा सिक्का भी सोने का है ?

A merchant plans to sell two types of personal computers — a desktop model and a portable model that will cost Rs. 25,000 and Rs. 40,000 respectively. He estimates that the total monthly demand of computers will not exceed 250 units. Determine the number of units of each type of computers which the merchant should stock to get maximum profit if he does not want to invest more than Rs. 70 lakhs and his profit on the desktop model is Rs. 4,500 and on the portable model is Rs. 5,000. Make an L.P.P. and solve it graphically.

एक सौदागर दो प्रकार के निजी कम्प्यूटर — एक डेस्कटॉप नमूना और दूसरा पोर्टेबल नमूना, जिनकी कीमतें क्रमशः 25,000 रु. तथा 40,000 रु. हैं, बेचने की योजना बनाता है । वह अनुमान लगाता है कि कम्प्यूटरों की कुल मासिक माँग 250 नगों से अधिक नहीं होगी । उसके पास निवेश के लिए अधिकतम 70 लाख रु. हैं तथा डेस्कटॉप नमूने पर लाभ 4,500 रु. तथा पोर्टेबल नमूने पर लाभ 5,000 रु. है, तो अधिकतम लाभ अर्जित करने के लिए सौदागर प्रत्येक प्रकार के कम्प्यूटर के कितने-कितने नग स्टॉक करे ? इस प्रश्न को रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर ग्राफ द्वारा हल कीजिए ।