

Roll No.

--	--	--	--	--	--	--	--

रोल नं.

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.
परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

- Please check that this question paper contains 8 printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains 29 questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minutes time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer script during this period.
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ 8 हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में 29 प्रश्न हैं ।
- कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जायेगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।

MATHEMATICS

गणित

Time allowed : 3 hours]
निर्धारित समय : 3 घण्टे]

[Maximum marks : 100
[अधिकतम अंक : 100

General Instructions :

- All questions are compulsory.*
- The question paper consists of 29 questions divided into three Sections A, B and C. Section A comprises of 10 questions of one mark each, Section B comprises of 12 questions of four marks each and Section C comprises of 7 questions of six marks each.*
- All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.*
- There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 4 questions of four marks each and 2 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.*
- Use of calculators is not permitted.*

सामान्य निर्देश :

- (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।
- (ii) इस प्रश्न-पत्र में 29 प्रश्न हैं जो तीन खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब तथा स । खण्ड अ में 10 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक एक अंक का है । खण्ड ब में 12 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक चार अंक का है । खण्ड स में 7 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक छः अंक का है ।
- (iii) खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकता अनुसार दिए जा सकते हैं ।
- (iv) पूर्ण प्रश्न-पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी चार अंकों वाले 4 प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले 2 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प हैं । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प करना है ।
- (v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है ।

SECTION – A

खण्ड – अ

Question numbers 1 to 10 carry 1 mark each.

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

1. Write the intercept cut off by the plane $2x + y - z = 5$ on x -axis.
समतल $2x + y - z = 5$ द्वारा x -अक्ष पर काटा गया अन्तःखंड लिखिए ।
2. Write the direction cosines of the vector $-2\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}$.
सदिश $-2\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}$ के दिक् कोसाइन लिखिए ।
3. For what value of 'a' the vectors $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ and $a\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$ are collinear ?
'a' के किस मान के लिए सदिश $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ तथा $a\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$ संरेख हैं ?
4. Write the value of $\int \frac{dx}{x^2 + 16}$
मान लिखिए : $\int \frac{dx}{x^2 + 16}$
5. Write A^{-1} for $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.
आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ का A^{-1} लिखिए ।

6. For what value of x , the matrix $\begin{bmatrix} 5-x & x+1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ is singular ?

x के किस मान के लिए आव्यूह $\begin{bmatrix} 5-x & x+1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ अव्युत्क्रमणीय है ?

7. For a 2×2 matrix, $A = [a_{ij}]$, whose elements are given by $a_{ij} = \frac{i}{j}$, write the value of a_{12} .

एक ऐसे 2×2 आव्यूह, $A = [a_{ij}]$, जिसके अवयव $a_{ij} = \frac{i}{j}$ द्वारा प्रदत्त है, से a_{12} का मान लिखिए ।

8. State the reason for the relation R in the set $\{1, 2, 3\}$ given by $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ not to be transitive.

समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ में $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध के संक्रामक न होने का कारण लिखिए ।

9. Write the value of $\tan^{-1} \left[\tan \frac{3\pi}{4} \right]$.

$\tan^{-1} \left[\tan \frac{3\pi}{4} \right]$ का मान लिखिए ।

10. Write the value of $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x} dx$

$\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x} dx$ का मान लिखिए ।

SECTION - B

खण्ड - ब

Question numbers 11 to 22 carry 4 marks each.

प्रश्न संख्या 11 से 22 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है ।

11. Probabilities of solving a specific problem independently by A and B are $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{3}$ respectively. If both try to solve the problem independently, find the probability that (i) the problem is solved (ii) exactly one of them solves the problem.

एक विशेष समस्या को A और B द्वारा स्वतंत्र रूप से हल करने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{1}{3}$ हैं । यदि दोनों स्वतंत्र रूप से समस्या हल करने का प्रयास करते हैं, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि (i) समस्या हल हो जाती है (ii) उनमें से तथ्यतः कोई एक समस्या हल कर लेता है ।

12. Find the angle between the following pair of lines :

$$\frac{-x+2}{-2} = \frac{y-1}{7} = \frac{z+3}{-3} \quad \text{and} \quad \frac{x+2}{-1} = \frac{2y-8}{4} = \frac{z-5}{4}$$

and check whether the lines are parallel or perpendicular.

रेखा युग्म $\frac{-x+2}{-2} = \frac{y-1}{7} = \frac{z+3}{-3}$ तथा $\frac{x+2}{-1} = \frac{2y-8}{4} = \frac{z-5}{4}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए ।
जाँच कीजिए कि क्या रेखाएँ समांतर हैं या लम्बवत हैं ।

13. Solve the following differential equation :

$$\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x.$$

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x.$$

14. Evaluate : $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx$

OR

Evaluate : $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)} dx$

मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)} dx$

15. Form the differential equation of the family of parabolas having vertex at the origin and axis along positive y-axis.

ऐसे परवल्यों के कुल का अवकल समीकरण बनाइए जिसका अक्ष धनात्मक y-अक्ष की दिशा में है तथा शीर्ष मूल बिन्दु पर है ।

16. Find a vector of magnitude 5 units, and parallel to the resultant of the vectors $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$.

सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के परिणामी के समांतर एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 5 इकाई है ।

17. Sand is pouring from a pipe at the rate of $12 \text{ cm}^3/\text{s}$. The falling sand forms a cone on the ground in such a way that the height of the cone is always one-sixth of the radius of the base. How fast is the height of the sand cone increasing when the height is 4 cm ?

OR

Find the points on the curve $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ at which the tangents are parallel to x -axis.

एक पाइप से रेत $12 \text{ सेमी}^3/\text{से.}$ की दर से गिर रही है। गिरती रेत भूमि पर एक ऐसा शंकु बनाती है जिसकी ऊँचाई सदैव आधार की त्रिज्या का छठा भाग है। रेत से बने शंकु की ऊँचाई किस दर से बढ़ रही है, जब ऊँचाई 4 सेमी है ?

अथवा

वक्र $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ के वह बिंदु ज्ञात कीजिए जहाँ स्पर्श रेखाएँ x -अक्ष के समांतर हैं।

18. Differentiate $x^x \cos x + \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ w.r.t. x

OR

If $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 + \cos \theta)$, find $\frac{d^2y}{dx^2}$

$x^x \cos x + \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

अथवा

यदि $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 + \cos \theta)$ है, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

19. If the function $f(x)$ given by $f(x) = \begin{cases} 3ax + b, & \text{if } x > 1 \\ 11, & \text{if } x = 1 \\ 5ax - 2b, & \text{if } x < 1 \end{cases}$

is continuous at $x = 1$, find the values of a and b .

यदि फलन $f(x)$ जो $f(x) = \begin{cases} 3ax + b, & \text{यदि } x > 1 \\ 11, & \text{यदि } x = 1 \\ 5ax - 2b, & \text{यदि } x < 1 \end{cases}$ द्वारा प्रदत्त है, $x = 1$ पर संतत है, तो a तथा b के मान ज्ञात कीजिए।

17. Sand is pouring from a pipe at the rate of $12 \text{ cm}^3/\text{s}$. The falling sand forms a cone on the ground in such a way that the height of the cone is always one-sixth of the radius of the base. How fast is the height of the sand cone increasing when the height is 4 cm ?

OR

Find the points on the curve $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ at which the tangents are parallel to x -axis.

एक पाइप से रेत $12 \text{ सेमी}^3/\text{से.}$ की दर से गिर रही है। गिरती रेत भूमि पर एक ऐसा शंकु बनाती है जिसकी ऊँचाई सदैव आधार की त्रिज्या का छठा भाग है। रेत से बने शंकु की ऊँचाई किस दर से बढ़ रही है, जब ऊँचाई 4 सेमी है ?

अथवा

वक्र $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ के वह बिंदु ज्ञात कीजिए जहाँ स्पर्श रेखाएँ x -अक्ष के समांतर हैं।

18. Differentiate $x^x \cos x + \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ w.r.t. x

OR

If $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 + \cos \theta)$, find $\frac{d^2y}{dx^2}$

$x^x \cos x + \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

अथवा

यदि $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 + \cos \theta)$ है, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

19. If the function $f(x)$ given by $f(x) = \begin{cases} 3ax + b, & \text{if } x > 1 \\ 11, & \text{if } x = 1 \\ 5ax - 2b, & \text{if } x < 1 \end{cases}$

is continuous at $x = 1$, find the values of a and b .

यदि फलन $f(x)$ जो $f(x) = \begin{cases} 3ax + b, & \text{यदि } x > 1 \\ 11, & \text{यदि } x = 1 \\ 5ax - 2b, & \text{यदि } x < 1 \end{cases}$ द्वारा प्रदत्त है, $x = 1$ पर संतत है, तो a तथा b के

मान ज्ञात कीजिए।

20. Using properties of determinants, prove the following :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = xyz(x-y)(y-z)(z-x)$$

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर निम्नलिखित सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = xyz(x-y)(y-z)(z-x)$$

21. Prove the following :

$$\cot^{-1} \left[\frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}} \right] = \frac{x}{2}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

OR

Find the value of $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$

$$\text{सिद्ध कीजिए : } \cot^{-1} \left[\frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}} \right] = \frac{x}{2}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए : $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$

22. Consider the binary operation * on the set {1, 2, 3, 4, 5} defined by $a * b = \min. \{a, b\}$. Write the operation table of the operation *.

समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5} में $a * b = \text{निम्नतम } \{a, b\}$ द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया पर विचार कीजिए। संक्रिया * के लिए संक्रिया सारणी लिखिए।

SECTION - C

खण्ड - स

Question numbers 23 to 29 carry 6 marks each.

प्रश्न संख्या 23 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न 6 अंक का है।

23. Bag I contains 3 red and 4 black balls and Bag II contains 5 red and 6 black balls. One ball is drawn at random from one of the bags and is found to be red. Find the probability that it was drawn from Bag II.

थैले I में 3 लाल तथा 4 काली गेंदें हैं तथा थैले II में 5 लाल तथा 6 काली गेंदें हैं। किसी एक थैले में से यादृच्छया एक गेंद निकाली गई है जो कि लाल रंग की पाई गई। इस बात की क्या प्रायिकता है कि यह गेंद थैले II में से निकाली गई है।

24. A factory makes tennis rackets and cricket bats. A tennis racket takes 1.5 hours of machine time and 3 hours of craftman's time in its making while a cricket bat takes 3 hours of machine time and 1 hour of craftman's time. In a day, the factory has the availability of not more than 42 hours of machine time and 24 hours of craftsman's time. If the profit on a racket and on a bat is Rs. 20 and Rs. 10 respectively, find the number of tennis rackets and crickets bats that the factory must manufacture to earn the maximum profit. Make it as an L.P.P. and solve graphically.

एक कारखाने में टेनिस के रैकेट तथा क्रिकेट के बल्ले बनते हैं। एक टेनिस रैकेट बनाने के लिए 1.5 घंटा यांत्रिक समय तथा 3 घंटे शिल्पकार का समय लगता है। एक क्रिकेट के बल्ले को बनाने में 3 घंटे यांत्रिक समय तथा एक घंटा शिल्पकार का समय लगता है। एक दिन में कारखाने में विभिन्न यंत्रों पर उपलब्ध यांत्रिक समय के 42 घंटे और शिल्पकार के समय के 24 घंटे से अधिक नहीं हैं। यदि रैकेट तथा बल्ले पर क्रमशः लाभ 20 रु. तथा 10 रु. है, तो कारखाने में अधिकतम लाभ अर्जित करने के लिए कितने रैकेट तथा क्रिकेट के बल्ले बनाएँ जाएँ? इस प्रश्न को रेखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर ग्राफ की सहायता से हल कीजिए।

25. Find the equation of the plane which contains the line of intersection of the planes $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) - 4 = 0$, $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + 5 = 0$ and which is perpendicular to the plane $\vec{r} \cdot (5\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}) + 8 = 0$.

समतलों $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) - 4 = 0$ तथा $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + 5 = 0$ की प्रतिच्छेदन रेखा को अन्तर्विष्ट करने वाले तथा तल $\vec{r} \cdot (5\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}) + 8 = 0$ पर लम्बवत तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

26. Evaluate : $\int_0^{\pi/2} 2 \sin x \cos x \tan^{-1}(\sin x) dx$

OR

Evaluate : $\int_0^{\pi/2} \frac{x \sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$

मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\pi/2} 2 \sin x \cos x \tan^{-1}(\sin x) dx$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\pi/2} \frac{x \sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$

27. Using integration find the area of the triangular region whose sides have equations $y = 2x + 1$, $y = 3x + 1$ and $x = 4$.

समाकलन विधि का प्रयोग करके उस त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाओं के समीकरण $y = 2x + 1$, $y = 3x + 1$ तथा $x = 4$ हैं।

28. Using matrix method, solve the following system of equations :

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{10}{z} = 4, \quad \frac{4}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 1, \quad \frac{6}{x} + \frac{9}{y} - \frac{20}{z} = 2; \quad x, y, z \neq 0$$

OR

Using elementary transformations, find the inverse of the matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

आव्यूहों का प्रयोग करके निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{10}{z} = 4, \quad \frac{4}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 1, \quad \frac{6}{x} + \frac{9}{y} - \frac{20}{z} = 2; \quad x, y, z \neq 0$$

अथवा

प्रारम्भिक संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा, निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

29. Show that of all the rectangles with a given perimeter, the square has the largest area.

दर्शाइए कि उन सभी आयतों, जिनका परिमाप दिया है, में से वर्ग का क्षेत्रफल अधिकतम है।